AvN learn

आधुनिक विद्या निकेतन ट्यूशन सेंटर

ADHUNIK VIDYA NIKETAN TUITION CENTER

अध्याय - 4
गणितीय आगमन का सिद्धांत
(Principle of Mathematical Induction)

प्रश्नावली 4.1

सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए गणितीय आगमन सिद्धांत के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि:

Question 1 :

$$1+3+3^2+...+3^{n-1}=\frac{(3^n-1)}{2}$$

Solution :

मान की दिया कथन $P(n)$ है, अर्थात्

$$P(n)=1+3+3^2+...+3^{n-1}=\frac{(3^n-1)}{2}$$

∴ n = 1

LHS = 1

RHS =

$$\frac{(3^1-1)}{2}=\frac{3-1}{2}=\frac{2}{2}=1$$

मान लीजिए P(n), n = k के लिए सत्य है।

किसी धन पूर्णांक k के लिए कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात

$$P(k)=1+3+3^2+...+3^{k-1}=\frac{(3^k-1)}{2} \qquad ....(i)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ भी सत्य है,

$$
\begin{aligned}
P(k+1) &= 1+3+3^2+\ldots+3^{(k+1)-1} \\
&= \left(1+3+3^2+\ldots+3^{k-1}\right)+3^k \\
&= \frac{(3^k-1)}{2}+3^k \qquad [\text{eq(i) से}] \\
&= \frac{3^k-1+2\cdot 3^k}{2} \\
&= \frac{3\cdot 3^k-1}{2} \\
&= \frac{3^{(k+1)}-1}{2}
\end{aligned}
$$

इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं **N** के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।

Question 2 :

$$
1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2
$$

Solution :

मान की दिया कथन $P(n)$ है, अर्थात्

$$
P(n)=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2
$$

∴ n = 1

LHS = 1

$$
P(1)=1^3=1
$$

RHS =

$$
P(1)=\frac{(3^1-1)}{2}=\frac{3-1}{2}=\frac{2}{2}=12
$$

मान लीजिए P(n), n = k के लिए सत्य है।

किसी धन पूर्णांक k के लिए कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात

$$
P(k)=1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 \qquad \ldots.(i)
$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ भी सत्य है,

$$
\begin{aligned}
P(k+1) &= 1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3 \\
&= \left(1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3\right)+(k+1)^3 \\
&= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3 \qquad [\text{eq(i) से}] \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{2^2}+(k+1)^3 \\
&= (k+1)^2\left[\frac{k^2}{4}+(k+1)\right] \\
&= (k+1)^2\left[\frac{k^2+4(k+1)}{4}\right] \\
&= (k+1)^2\left[\frac{k^2+4k+4}{4}\right] \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{2^2} \\
&= \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं **N** के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।

Question 3 :

$$\mathbf{1+\frac{1}{(1+2)}+\frac{1}{(1+2+3)}+\cdots+\frac{1}{(1+2+3+\ldots n)}=\frac{2n}{(n+1)}}$$

Solution :

मान की दिया कथन $P(n)$ है, अर्थात्

$$P(n)=1+\frac{1}{(1+2)}+\frac{1}{(1+2+3)}+\cdots+\frac{1}{(1+2+3+\ldots n)}=\frac{2n}{(n+1)}$$

∴ n = 1

LHS =

$$P(1)=1$$

RHS =

$$P(1)=\frac{2\times 1}{(1+1)}=\frac{2}{2}=1$$

मान लीजिए P(n), n = k के लिए सत्य है।

किसी धन पूर्णांक k के लिए कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात

$$P(k)=1+\frac{1}{(1+2)}+\frac{1}{(1+2+3)}+\cdots+\frac{1}{(1+2+3+\ldots k)}=\frac{2k}{(k+1)} \qquad \ldots.(i)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ भी सत्य है,

$$
\begin{aligned}
P(k+1) &= 1+\frac{1}{(1+2)}+\frac{1}{(1+2+3)}+\cdots+\frac{1}{(1+2+3+\ldots(k+1))} \\
&= \left[1+\frac{1}{(1+2)}+\frac{1}{(1+2+3)}+\cdots+\frac{1}{(1+2+3+\ldots k)}\right]+\frac{1}{(1+2+3+\ldots k+(k+1))} \\
&= \frac{2k}{(k+1)}+\frac{1}{(1+2+3+\ldots k)+(k+1)} \qquad [\text{eq(i) से}] \\
&= \frac{2k}{(k+1)}+\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)} \qquad \left[\therefore 1+2+3+..+n=\frac{n(n+1)}{2} \text{ से}\right] \\
&= \frac{2k}{(k+1)}+\frac{1}{(k+1)\left[\frac{k}{2}+1\right]} \\
&= \frac{2k}{(k+1)}+\frac{1}{\frac{(k+1)(k+2)}{2}} \\
&= \frac{2k}{(k+1)}+\frac{2}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{2}{(k+1)}\left[k+\frac{1}{k+2}\right] \\
&= \frac{2}{(k+1)}\left[\frac{k(k+2)+1}{k+2}\right] \\
&= \frac{2}{(k+1)}\left[\frac{k^2+2k+1}{k+2}\right] \\
&= \frac{2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{2\,\cancel{(k+1)}\,(k+1)}{\cancel{(k+1)}\,(k+2)} \\
&= \frac{2(k+1)}{(k+2)} \\
&= \frac{2(k+1)}{(k+1)+1}
\end{aligned}
$$

इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं **N** के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।

Question 4 :

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Solution :

मान की दिया कथन $P(n)$ है, अर्थात्

$$P(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

∴ n = 1

LHS = 1

$$P(1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

RHS =

$$\begin{aligned} P(1) &= \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4} \\ &= \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{4} \\ &= \frac{24}{4} = 6 \end{aligned}$$

मान लीजिए P(n), n = k के लिए सत्य है।

किसी धन पूर्णांक k के लिए कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात

$$P(k) = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} \qquad \ldots.(i)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ भी सत्य है,

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1)(k+2) + (k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2] \\ &= (1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1)(k+2)) + (k+1)(k+2)(k+3) \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3) \qquad [\text{eq(i) से}] \\ &= (k+1)(k+2)(k+3)\left(\frac{k}{4} + 1\right) \\ &= (k+1)(k+2)(k+3)\left(\frac{k+4}{4}\right) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4} \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1)][(k+1)+2][(k+1)+3]}{4} \end{aligned}$$

इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं **N** के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।

Question 5 :

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \cdots + n \cdot 3^n = \frac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{4}$$

Solution :

मान की दिया कथन $P(n)$ है, अर्थात्

$$P(n) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \cdots + n \cdot 3^n = \frac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{4}$$

∴ n = 1

LHS =

$$1 \cdot 3 = 3$$

RHS =

$$\begin{aligned} P(1) &= \frac{(2 \times 1 - 1) \times 3^{1+1} + 3}{4} \\ &= \frac{(2-1) \times 3^2 + 3}{4} \\ &= \frac{1 \times 9 + 3}{4} \\ &= \frac{9+3}{4} \\ &= \frac{12}{4} = 3 \end{aligned}$$

मान लीजिए P(n), n = k के लिए सत्य है।

किसी धन पूर्णांक k के लिए कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात

$$P(k) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \cdots + k \cdot 3^k = \frac{(2k-1)3^{k+1} + 3}{4} \qquad \ldots.(i)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ भी सत्य है,

$$
\begin{aligned}
P(k+1) &= 1\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3^3 + \cdots + (k+1)\cdot 3^{k+1} \\
&= \left[1\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3^3 + \cdots + k\cdot 3^k\right] + (k+1)\cdot 3^{k+1} \\
&= \frac{(2k-1)3^{k+1}+3}{4} + (k+1)\cdot 3^{k+1} \qquad [\text{eq(i) से}] \\
&= \frac{(2k-1)3^{k+1}+3+4(k+1)\cdot 3^{k+1}}{4} \\
&= \frac{(2k-1)3^{k+1}+4(k+1)\cdot 3^{k+1}+3}{4} \\
&= \frac{3^{k+1}\left((2k-1)+4(k+1)\right)+3}{4} \\
&= \frac{3^{k+1}(2k-1+4k+4)+3}{4} \\
&= \frac{(6k+3)3^{k+1}+3}{4} \\
&= \frac{3(2k+1)3^{k+1}+3}{4} \\
&= \frac{(2k+1)3^{(k+1)+1}+3}{4} \\
&= \frac{(2(k+1)-1)3^{(k+1)+1}+3}{4}
\end{aligned}
$$

इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं **N** के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।

Question 6 :

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \left[\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right]$$

Solution :

मान की दिया कथन $P(n)$ है, अर्थात्

$$P(n) = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \left[\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right]$$

∴ n = 1

LHS =

$$P(1) = 1\cdot 2 = 2$$

RHS =

$$P(1) = \left[\frac{1 \times (1+1)(1+2)}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{1 \times 2 \times 3}{3}\right]$$

$$= \frac{6}{3} = 2$$

मान लीजिए P(n), n = k के लिए सत्य है।

किसी धन पूर्णांक k के लिए कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात

$$P(k) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1) = \left[\frac{k(k+1)(k+2)}{3}\right] \qquad \ldots .(i)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ भी सत्य है,

$$P(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (k+1)[(k+1)+1]$$

$$= [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1)] + (k+1)[(k+1)+1]$$

$$= \left[\frac{k(k+1)(k+2)}{3}\right] + (k+1)(k+2) \qquad [\text{eq(i) से}]$$

$$= (k+1)(k+2)\left[\frac{k}{3} + 1\right]$$

$$= (k+1)(k+2)\left[\frac{k+3}{3}\right]$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)=2]}{3}$$

इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं **N** के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।

Question 7 :

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + (2n-1)(2n+1) = \frac{n(4n^2+6n-1)}{3}$$

Solution :

मान की दिया कथन $P(n)$ है, अर्थात्

$$P(n) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + (2n-1)(2n+1) = \frac{n(4n^2+6n-1)}{3}$$

∴ n = 1

LHS = 1

$$1 \cdot 3 = 3$$

RHS =

$$P(1) = \frac{1 \times (4 \times 1^2 + 6 \times 1 - 1)}{3} = \frac{4 + 6 - 1}{3} = \frac{9}{3}$$

मान लीजिए P(n), n = k के लिए सत्य है।

किसी धन पूर्णांक k के लिए कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात

$$P(k) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + (2k-1)(2k+1) = \frac{k(4k^2 + 6k - 1)}{3} \qquad \ldots .(i)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ भी सत्य है,

$$P(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + (k+1)[(k+1)+1]$$

$$= [1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1)] + (k+1)[(k+1)+1]$$

$$= \left[\frac{k(k+1)(k+2)}{3}\right] + (k+1)(k+2) \qquad [\text{eq(i) से}]$$

$$= (k+1)(k+2)\left[\frac{k}{3} + 1\right]$$

$$= (k+1)(k+2)\left[\frac{k+3}{3}\right]$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)=2]}{3}$$

इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं **N** के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।

Question 8 :

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$$

Solution :

मान की दिया कथन $P(n)$ है, अर्थात्

$$P(n) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \cdots + n \cdot 3^n = \frac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{4}$$

∴ n = 1

LHS =

$$P(1) = 1 \cdot 3 = 3$$

RHS =

$$\begin{aligned}P(1) &= \frac{(2\times 1-1)\times 3^{1+1}+3}{4}\\ &= \frac{(2-1)\times 3^2+3}{4}\\ &= \frac{1\times 9+3}{4}\\ &= \frac{9+3}{4}\\ &= \frac{12}{4}=3\end{aligned}$$

मान लीजिए P(n), n = k के लिए सत्य है।

किसी धन पूर्णांक k के लिए कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात

$$P(k)=1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\cdots+k\cdot 3^k=\frac{(2k-1)3^{k+1}+3}{4} \qquad \ldots .(i)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ भी सत्य है,

$$\begin{aligned}P(k+1) &= 1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\cdots+(k+1)\cdot 3^{k+1}\\ &= \left[1\cdot 3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\cdots+k\cdot 3^k\right]+(k+1)\cdot 3^{k+1}\\ &= \frac{(2k-1)3^{k+1}+3}{4}+(k+1)\cdot 3^{k+1} \qquad [\text{eq(i) से}]\\ &= \frac{(2k-1)3^{k+1}+3+4(k+1)\cdot 3^{k+1}}{4}\\ &= \frac{(2k-1)3^{k+1}+4(k+1)\cdot 3^{k+1}+3}{4}\\ &= \frac{3^{k+1}\left((2k-1)+4(k+1)\right)+3}{4}\\ &= \frac{3^{k+1}(2k-1+4k+4)+3}{4}\\ &= \frac{(6k+3)3^{k+1}+3}{4}\\ &= \frac{3(2k+1)3^{k+1}+3}{4}\\ &= \frac{(2k+1)3^{(k+1)+1}+3}{4}\\ &= \frac{(2(k+1)-1)3^{(k+1)+1}+3}{4}\end{aligned}$$

इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं **N** के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।

Question 9 :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

Solution :

मान की दिया कथन $P(n)$ है, अर्थात्

$$P(n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

∴ n = 1

LHS =

$$P(1)=\frac{1}{2}$$

RHS =

$$P(1)=1-\frac{1}{2^1}=1-\frac{1}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$$

मान लीजिए P(n), n = k के लिए सत्य है।

किसी धन पूर्णांक k के लिए कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात

$$P(k)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^k} \qquad \ldots.(i)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ भी सत्य है,

$$P(k+1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}}$$

$$=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right]+\frac{1}{2^{k+1}}$$

$$=1-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}} \qquad [\text{eq(i) से}]$$

$$=1-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k\cdot 2}$$

$$=1-\frac{1}{2^k}\left[1-\frac{1}{2}\right]$$

$$=1-\frac{1}{2^k}\left[\frac{2-1}{2}\right]$$

$$=1-\frac{1}{2^k}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=1-\frac{1}{2^{k+1}}$$

इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं **N** के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।

Question 10 :

$$\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{(6n+4)}$$

Solution :

मान की दिया कथन $P(n)$ है, अर्थात्

$$P(n)=\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{(6n+4)}$$

∴ n = 1

LHS =

$$P(1)=\frac{1}{2\cdot 5}=\frac{1}{10}$$

RHS =

$$P(1)=\frac{1}{(6\times 1+4)}=\frac{1}{10}$$

मान लीजिए P(n), n = k के लिए सत्य है।

किसी धन पूर्णांक k के लिए कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात

$$P(k)=\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{k}{(6k+4)} \qquad \ldots.(i)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ भी सत्य है,

$$P(k+1) = \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(3(k+1)-1)(3(k+1)+2)}$$

$$= \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} + \frac{1}{(3k+3-1)(3k+3+2)}$$

$$= \left[\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 11} + \cdots + \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}\right] + \frac{1}{(3k+2)(3k+5)}$$

$$= \frac{k}{(6k+4)} + \frac{1}{(3k+2)(3k+5)} \qquad \text{[eq(i) से]}$$

$$= \frac{k}{2(3k+2)} + \frac{1}{(3k+2)(3k+5)}$$

$$= \frac{1}{(3k+2)}\left[\frac{k}{2} + \frac{1}{(3k+5)}\right]$$

$$= \frac{1}{(3k+2)}\left[\frac{k(3k+5)+2}{2(3k+5)}\right]$$

$$= \frac{k(3k+5)+2}{2(3k+2)(3k+5)}$$

$$= \frac{3k^2+5k+2}{2(3k+2)(3k+5)}$$

$$= \frac{3k^2+3k+2k+2}{2(3k+2)(3k+5)}$$

$$= \frac{3k(k+1)+2(k+1)}{2(3k+2)(3k+5)}$$

$$= \frac{\cancel{(3k+2)}\,(k+1)}{2\,\cancel{(3k+2)}\,(3k+5)}$$

$$= \frac{(k+1)}{2(3k+5)}$$

$$= \frac{(k+1)}{(6k+10)}$$

$$= \frac{(k+1)}{(6(k+1)+4)}$$

इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं **N** के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।

Question 11 :

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

Solution :

मान की दिया कथन $P(n)$ है, अर्थात्

$$P(n)=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

∴ n = 1

LHS =

$$P(1)=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}=\frac{1}{6}$$

RHS =

$$P(1)=\frac{1\times(1+3)}{4(1+1)(1+2)}=\frac{1\times\cancel{4}}{\cancel{4}\times2\times3}=\frac{1}{6}$$

मान लीजिए P(n), n = k के लिए सत्य है।

किसी धन पूर्णांक k के लिए कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात

$$P(k)=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}\qquad\ldots.(i)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ भी सत्य है,

$$P(k+1)=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(k+1)\{(k+1)+1\}\{(k+1)+2\}}$$

$$=\left[\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right]+\frac{1}{(k+1)\{(k+1)+1\}\{(k+1)+2\}}$$

$$=\left[\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}\right]+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \qquad \text{[eq(i) से]}$$

$$=\frac{1}{(k+1)(k+2)}\left[\frac{k(k+3)}{4}+\frac{1}{(k+3)}\right]$$

$$=\frac{1}{(k+1)(k+2)}\left[\frac{k(k+3)^2+4}{4(k+3)}\right]$$

$$=\frac{1}{(k+1)(k+2)}\left[\frac{k(k^2+6k+9)+4}{4(k+3)}\right]$$

$$=\frac{k^3+6k^2+9k+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{k^3+5k^2+k^2+4k+5k+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{k^3+5k^2+4k+k^2+5k+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{k(k^2+5k+4)+(k^2+5k+4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{(k+1)(k^2+5k+4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{(k+1)(k^2+4k+k+4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{(k+1)\,[(k+1)(k+4)+(k+4)]}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{(k+1)\,\cancel{(k+1)}\,(k+4)}{4\,\cancel{(k+1)}\,(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{(k+1)\,[(k+1)+3]}{4\,[(k+1)+1]\,[(k+1)+2]}$$

इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं **N** के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।

Question 12 :

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

Solution :

मान की दिया कथन $P(n)$ है, अर्थात्

$P(n) = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

∴ n = 1

LHS =

$$P(1) = a$$

RHS =

$$P(1) = \frac{a(r^1 - 1)}{r - 1} = \frac{a\ \cancel{(r - 1)}}{\cancel{(r - 1)}} = a$$

मान लीजिए P(n), n = k के लिए सत्य है।

किसी धन पूर्णांक k के लिए कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात

$$P(k) = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{k-1} = \frac{a(r^k - 1)}{r - 1} \qquad \ldots .(i)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ भी सत्य है,

$$\begin{aligned}
P(k+1) &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{(k+1)-1} \\
&= \left[a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{k-1}\right] + ar^{(k+1)-1} \\
&= \left[a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{k-1}\right] + ar^k \\
&= \left[\frac{a(r^k-1)}{r-1}\right] + ar^k \\
&= a\left[\frac{r^k-1}{r-1} + r^k\right] \\
&= a\left[\frac{r^k-1+r^k(r-1)}{r-1}\right] \\
&= a\left[\frac{r^k+r^k(r-1)-1}{r-1}\right] \\
&= a\left[\frac{r^k\left[1+(r-1)\right]-1}{r-1}\right] \\
&= a\left[\frac{r^k\left[1+r-1\right]-1}{r-1}\right] \\
&= a\left[\frac{r^k\left[\cancel{1}+r-\cancel{1}\right]-1}{r-1}\right] \\
&= a\left[\frac{r^k\cdot r-1}{r-1}\right] \\
&= a\left[\frac{r^{k+1}-1}{r-1}\right] \\
&= \frac{a(r^{k+1}-1)}{r-1}
\end{aligned}$$

इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं **N** के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।

Question 13 :

$$\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)+\cdots+\left(1+\frac{(2n+1)}{n^2}\right)=(n+1)^2$$

Solution :

मान की दिया कथन $P(n)$ है, अर्थात्

$$P(n)=\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)+\cdots+\left(1+\frac{(2n+1)}{n^2}\right)=(n+1)^2$$

∴ n = 1

LHS =

$$P(1)=\left(1+\frac{3}{1}\right)=1+3=4$$

RHS =

$$P(1)=(1+1)^2=2^2=4$$

मान लीजिए P(n), n = k के लिए सत्य है।

किसी धन पूर्णांक k के लिए कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात

$$P(k) = \left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)+\cdots+\left(1+\frac{(2k+1)}{k^2}\right) = (k+1)^2 \qquad ....(i)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ भी सत्य है,

$$\begin{aligned}
P(k+1) &= \left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)+\cdots+\left(1+\frac{(2(k+1)+1)}{(k+1)^2}\right) \\
&= \left[\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)+\ldots\left(1+\frac{(2k+1)}{k^2}\right)\right]\left(1+\frac{2(k+1)+1}{(k+1)^2}\right) \\
&= \left[\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)+\ldots\left(1+\frac{(2k+1)}{k^2}\right)\right]\left(1+\frac{2k+2+1}{(k+1)^2}\right) \qquad \ldots[\text{eq(i) से}] \\
&= (k+1)^2+\left(1+\frac{2k+3}{(k+1)^2}\right) \\
&= \cancel{(k+1)^2}\;\frac{(k+1)^2+2k+3}{\cancel{(k+1)^2}} \\
&= (k+1)^2+2k+3 \\
&= k^2+2k+1+2k+3 \\
&= k^2+4k+4 \\
&= k^2+2\cdot k\cdot 2+2^2 \\
&= (k+2)^2 \\
&= [(k+1)+2]^2
\end{aligned}$$

इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं **N** के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।

Question 14 :

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right) = (n+1)$$

Solution :

मान की दिया कथन $P(n)$ है, अर्थात्

$$P(n) = \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right) = (n+1)$$

∴ n = 1

LHS =

$$P(1) = \left(1+\frac{1}{1}\right) = 1+1 = 2$$

RHS =

$$P(1) = (1+1) = 2$$

मान लीजिए P(n), n = k के लिए सत्य है।

किसी धन पूर्णांक k के लिए कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात

$$P(k)=\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k}\right)=(k+1) \qquad \ldots.(i)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ भी सत्य है,

$$

$$
\begin{aligned}
P(k+1) &= \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\\
&= \left[\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]\left(1+\frac{1}{k+1}\right)\\
&= (k+1)\left(1+\frac{1}{k+1}\right) \qquad \ldots[\text{eq(i) से}]\\
&= \cancel{(k+1)}\left(\frac{k+1+1}{\cancel{k+1}}\right)\\
&= [(k+1)+1]
\end{aligned}
$$

$$

इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं **N** के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।

Question 15 :

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

Solution :

मान की दिया कथन $P(n)$ है, अर्थात्

$$P(n)=1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

∴ n = 1

LHS =

$$P(1)=1^2=1$$

RHS =

$$P(1)=\frac{1\times(2\times1-1)(2\times1+1)}{3}=\frac{1\times1\times3}{3}=\frac{3}{3}=1$$

मान लीजिए P(n), n = k के लिए सत्य है।

किसी धन पूर्णांक k के लिए कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात

$$P(k)=1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2=\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} \qquad \ldots.(i)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ भी सत्य है,

$$
\begin{aligned}
P(k+1) &= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2(k+1)-1)^2 \\
&= \left[1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2\right] + (2(k+1)-1)^2 \\
&= \left[\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}\right] + (2k+2-1)^2 \qquad \ldots \text{eq(i) से} \\
&= \left[\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}\right] + (2k+1)^2 \\
&= \left[\frac{k(2k-1)(2k+1) + 3(2k+1)^2}{3}\right] \\
&= (2k+1)\left[\frac{k(2k-1) + 3\,(2k+1)}{3}\right] \\
&= (2k+1)\left[\frac{2k^2 - k + 6k + 3}{3}\right] \\
&= (2k+1)\left[\frac{2k^2 + 5k + 3}{3}\right] \\
&= (2k+1)\left[\frac{2k^2 + 2k + 3k + 3}{3}\right] \\
&= (2k+1)\left[\frac{2k(k+1) + 3(k+1)}{3}\right] \\
&= (2k+1)\left[\frac{(2k+3)(k+1)}{3}\right] \\
&= \frac{(2k+1)(2k+3)(k+1)}{3} \\
&= \frac{(k+1)\,[2(k+1)-1]\,[2(k+1)+1]}{3}
\end{aligned}
$$

इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं **N** के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।

Question 16 :

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{(3n+1)}$$

Solution :

मान की दिया कथन $P(n)$ है, अर्थात्

$$P(n) = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{(3n+1)}$$

∴ n = 1

LHS =

$$P(1) = \frac{1}{1\cdot 4} = \frac{1}{4}$$

RHS =

$$
\begin{aligned}
P(1) &= \frac{1}{(3 \times 1 + 1)} \\
&= \frac{1}{(3+1)} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

मान लीजिए P(n), n = k के लिए सत्य है।

किसी धन पूर्णांक k के लिए कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात

$$
P(k) = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{k}{(3k+1)} \qquad \ldots.(i)
$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ भी सत्य है,

$$
\begin{aligned}
P(k+1) &= \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{[3(k+1)-2][3(k+1)+1]} \\
&= \left[\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}\right] + \frac{1}{[3(k+1)-2][3(k+1)+1]} \\
&= \frac{k}{(3k+1)} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4} \qquad \text{[eq(i) से]} \\
&= \frac{1}{3k+1}\left[k + \frac{1}{3k+4}\right] \\
&= \frac{1}{3k+1}\left[\frac{k(3k+4)+1}{3k+4}\right] \\
&= \frac{1}{3k+1}\left[\frac{3k^2+4k+1}{3k+4}\right] \\
&= \frac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)} \\
&= \frac{3k^2+3k+k+1}{(3k+1)(3k+4)} \\
&= \frac{3k(k+1)+(k+1)}{(3k+1)(3k+4)} \\
&= \frac{\cancel{(3k+1)}\,(k+1)}{\cancel{(3k+1)}\,(3k+4)} \\
&= \frac{(k+1)}{(3k+4)} \\
&= \frac{(k+1)}{[3(k+1)+1]}
\end{aligned}
$$

इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं **N** के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।

Question 17 :

$$
\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n}{3(2n+3)}
$$

Solution :

मान की दिया कथन $P(n)$ है, अर्थात्

$$P(n) = \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n}{3(2n+3)}$$

∴ n = 1

LHS =

$$P(1) = \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{15}$$

RHS =

$$\begin{aligned} P(1) &= \frac{1}{3(2 \times 1 + 3)} \\ &= \frac{1}{3(2+3)} \\ &= \frac{1}{3 \times 5} = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

मान लीजिए P(n), n = k के लिए सत्य है।

किसी धन पूर्णांक k के लिए कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात

$$P(k) = \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k}{3(2k+3)} \qquad \dots .(i)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ भी सत्य है,

$$\begin{aligned} P(k+1) &= \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(2(k+1)+1)(2(k+1)+3)} \\ &= \left[\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\right] + \frac{1}{(2(k+1)+1)(2(k+1)+3)} \\ &= \frac{k}{3(2k+3)} + \frac{1}{(2k+2+1)(2k+2+3)} \qquad [\text{eq(i) से}] \\ &= \frac{k}{3(2k+3)} + \frac{1}{(2k+3)(2k+5)} \\ &= \frac{1}{2k+3}\left[\frac{k}{3} + \frac{1}{(2k+5)}\right] \\ &= \frac{1}{2k+3}\left[\frac{k(2k+5)+3}{3(2k+5)}\right] \\ &= \frac{1}{2k+3}\left[\frac{2k^2+5k+3}{3(2k+5)}\right] \\ &= \frac{2k^2+5k+3}{3(2k+5)(2k+3)} \\ &= \frac{2k^2+3k+2k+3}{3(2k+5)(2k+3)} \\ &= \frac{k(2k+3)+(2k+3)}{3(2k+5)(2k+3)} \\ &= \frac{(k+1)\ \cancel{(2k+3)}}{3(2k+5)\ \cancel{(2k+3)}} \\ &= \frac{(k+1)}{3(2k+5)} \\ &= \frac{(k+1)}{3(2(k+1)+3)} \end{aligned}$$

इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं **N** के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।

Question 18 :

$1+2+3+\cdots+n<\frac{1}{8}(2n+1)^2$

Solution :

मान की दिया कथन $P(n)$ है, अर्थात्

$P(n): 1+2+3+\cdots+n<\frac{1}{8}(2n+1)^2$

∴ n = 1

$$P(1): 1$$

$$P(1): \frac{1}{8}(2\times 1+1)^2=\frac{1}{8}(2+1)^2=\frac{1}{8}\times 3^2=\frac{1}{8}\times 9=\frac{9}{8}$$

मान लीजिए P(n), n = k के लिए सत्य है।

किसी धन पूर्णांक k के लिए कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात

$$P(k)=1+2+3+\cdots+k<\frac{1}{8}(2k+1)^2 \qquad \ldots.(i)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ भी सत्य है,

$$\begin{aligned} P(k+1): 1+2+3+\cdots+k &< \frac{1}{8}(2k+1)^2 \qquad \ldots \text{eq(i) से} \\ 1+2+3+\cdots+k+(k+1) &< \frac{1}{8}(2k+1)^2+(k+1) \\ &< \frac{(2k+1)^2+8(k+1)}{8} \\ &< \frac{4k^2+4k+1+8k+8}{8} \\ &< \frac{4k^2+12k+9}{8} \\ &< \frac{(2k)^2+2\cdot 2k\cdot 3+3^2}{8} \\ &< \frac{(2k+3)^2}{8} \\ &< \frac{1}{8}[2(k+1)+1]^2 \end{aligned}$$

इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं **N** के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।

Question 19 :

$n(n+1)(n+5)$, संख्या 3 का एक गुणज है।

Solution :

मान की दिया कथन $P(n)$ है, अर्थात्

$$P(n): n(n+1)(n+5) \text{जो 3 का गुणज है।}$$

∴ n = 1

$$P(1) = 1 \times (1+1)(1+5) = 1 \times 2 \times 6 = 12 \text{जो 3 का गुणज है।}$$

किसी धन पूर्णांक k के लिए कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात

$$P(k): k(k+1)(k+5) \text{जो 3 का गुणज है।}$$

$$k(k+1)(k+5) = 3m \ \forall \ m \in \backslash \mathrm{N} \qquad \ldots.(i)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ भी सत्य है,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (k+1)[(k+1)+1][(k+1)+5] \\
&\Rightarrow (k+1)(k+2)[(k+1)+5] \\
&\Rightarrow (k+1)(k+2)[(k+5)+1] \\
&\Rightarrow (k+1)(k+2)(k+5)+(k+1)(k+2) \\
&\Rightarrow (k+2)\Big[(k+1)(k+5)\Big]+(k+1)(k+2) \\
&\Rightarrow \Big[k(k+1)(k+5)+2(k+1)(k+5)\Big]+(k+1)(k+2) \\
&\Rightarrow \Big[3m+2(k+1)(k+5)\Big]+(k+1)(k+2) \qquad \ldots \text{eq(i) से} \\
&\Rightarrow 3m+2(k+1)(k+5)+(k+1)(k+2) \\
&\Rightarrow 3m+(k+1)\Big[2(k+5)+(k+2)\Big] \\
&\Rightarrow 3m+(k+1)\Big[2k+10+k+2\Big] \\
&\Rightarrow 3m+(k+1)(3k+12) \\
&\Rightarrow 3m+3(k+1)(k+4) \\
&\Rightarrow 3\Big[m+(k+1)(k+4)\Big] \text{जो 3 का गुणज है।}
\end{aligned}$$

इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं **N** के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।

Question 20 :

$10^{2n-1}+1$ संख्या 11 से भाज्य है।

Solution :

मान की दिया कथन $P(n)$ है, अर्थात्

$$P(n): 10^{2n-1}+1 \text{ संख्या 11 से भाज्य है।}$$

∴ n = 1

$$P(1): 10^{2\times1-1}+1 = 10+1 = 11 \text{ संख्या 11 से भाज्य है।}$$

किसी धन पूर्णांक k के लिए कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात

$$P(k): 10^{2k-1}+1 \text{ संख्या 11 से भाज्य है।}$$

$$10^{2k-1}+1 = 11m \ \forall \ m \in \backslash \mathrm{N} \qquad \ldots.(i)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ भी सत्य है,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 10^{2(k+1)-1}+1 \\
&\Rightarrow 10^{2k+2-1}+1 \\
&\Rightarrow 10^{2k+1}+1 \\
&\Rightarrow 10^2\left(10^{2k-1}\right)+1 \\
&\Rightarrow 10^2\left(10^{2k-1}+1-1\right)+1 \\
&\Rightarrow 10^2\left(10^{2k-1}+1\right)-10^2+1 \\
&\Rightarrow 10^2\cdot 11m-100+1 \qquad \ldots \text{eq(i) से} \\
&\Rightarrow 10^2\cdot 11m-99 \\
&\Rightarrow 11(100m-9) \text{ संख्या } 11 \text{ से भाज्य है।}
\end{aligned}$$

इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं **N** के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।

Question 21 :

$x^{2n}-y^{2n},\ (x+y)$ से भाज्य है।

Solution :

मान की दिया कथन $P(n)$ है, अर्थात्

$$P(n): x^{2n}-y^{2n},\ (x+y)\text{से भाज्य है।}$$

∴ n = 1

$$P(1): x^{2\cdot 1}-y^{2\cdot 1}=x^2-y^2=(x+y)(x-y)\ (x+y)\text{से भाज्य है।}$$

किसी धन पूर्णांक k के लिए कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात

$$P(k): x^{2k}-y^{2k},\ (x+y)\text{से भाज्य है।}$$

$$x^{2k}-y^{2k}=m(x+y)\ \forall\ m\in \backslash\text{N} \qquad \ldots.(i)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ भी सत्य है,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x^{2(k+1)}-y^{2(k+1)} \\
&\Rightarrow x^{2k+2}-y^{2k+2} \\
&\Rightarrow x^2\left(x^{2k}\right)-y^2\left(y^{2k}\right) \\
&\Rightarrow x^2\left(x^{2k}-y^{2k}+y^{2k}\right)-y^2\left(y^{2k}\right) \\
&\Rightarrow x^2\left(x^{2k}-y^{2k}\right)+x^2y^{2k}-y^2\left(y^{2k}\right) \\
&\Rightarrow x^2\cdot a(x+y)+x^2y^{2k}-y^2\left(y^{2k}\right) \qquad \ldots \text{eq(i) से} \\
&\Rightarrow x^2\cdot a(x+y)+y^{2k}\left(x^2-y^2\right) \\
&\Rightarrow x^2\cdot a(x+y)+y^{2k}(x+y)(x-y) \\
&\Rightarrow \left[x^2\cdot a+y^{2k}(x-y)\right] \\
&\Rightarrow \left[ax^2+(x-y)y^{2k}\right],\ (x+y)\text{से भाज्य है।}
\end{aligned}$$

इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं **N** के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।

Question 22 :

$3^{2n+2}-8n-9$, संख्या 8 से भाज्य है।

Solution :

मान की दिया कथन $P(n)$ है, अर्थात्

$$P(n) : 3^{2n+2} - 8n - 9, \text{संख्या 8 से भाज्य है।}$$

∴ n = 1

$$P(1) : 3^{2\times1+2} - 8 \times 1 - 9 = 3^4 - 8 - 9 = 81 - 17 = 64, \text{संख्या 8 से भाज्य है।}$$

किसी धन पूर्णांक k के लिए कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात

$$P(k) : 3^{2k+2} - 8k - 9, \text{संख्या 8 से भाज्य है।}$$

$$3^{2k+2} - 8k - 9 = 8m \ \forall \ m \in \backslash\mathrm{N} \qquad \ldots.(i)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ भी सत्य है,

$$\begin{aligned}
P(k+1) : & \ 3^{2(k+1)+2} - 8(k+1) - 9 \\
& \Rightarrow 3^{2k+2+2} - 8k - 8 - 9 \\
& \Rightarrow 3^{2k+4} - 8k - 17 \\
& \Rightarrow 3^2\left(3^{2k+2}\right) - 8k - 17 \\
& \Rightarrow 3^2\left(3^{2k+2} - 8k - 9 + 8k + 9\right) - 8k - 17 \\
& \Rightarrow 3^2\left(3^{2k+2} - 8k - 9\right) + 3^2\,(8k+9) - 8k - 17 \\
& \Rightarrow 3^2 \cdot 8m + 9\,(8k+9) - 8k - 17 \qquad \ldots \text{eq(i) से} \\
& \Rightarrow 3^2 \cdot 8m + 72k + 81 - 8k - 17 \\
& \Rightarrow 9 \cdot 8m + 72k - 8k + 81 - 17 \\
& \Rightarrow 9 \cdot 8m + 64k + 64 \\
& \Rightarrow 8\,(9m + 8k + 8), \text{संख्या 8 से भाज्य है।}
\end{aligned}$$

इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं **N** के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।

Question 23 :

$41^n - 14^n$, संख्या 27 का एक गुणज है।

Solution :

मान की दिया कथन $P(n)$ है, अर्थात्

$$P(n) = 41^n - 14^n, \text{संख्या 27 का एक गुणज है।}$$

∴ n = 1

$$P(1) : 41^1 - 14^1 = 41 - 14 = 27, \text{संख्या 27 का एक गुणज है।}$$

P(n), n = 1 के लिए सत्य है।

मान लीजिए P(n), n = k के लिए सत्य है।

$$P(k) : 41^k - 14^k, \text{संख्या 27 का एक गुणज है।}$$

$$41^k - 14^k = 27m \ \forall \ m \in \backslash\mathrm{N} \qquad \ldots.(i)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ भी सत्य है,

$$\Rightarrow 41^{k+1} - 14^{k+1}$$
$$\Rightarrow 41 \cdot 41^k - 14 \cdot 14^k$$
$$\Rightarrow 41(41^k - 14^k + 14^k) - 14 \cdot 14^k$$
$$\Rightarrow 41(41^k - 14^k) + 41 \cdot 14^k - 14 \cdot 14^k$$
$$\Rightarrow 41 \cdot 27m + 41 \cdot 14^k - 14 \cdot 14^k \qquad \ldots \text{eq(i) से}$$
$$\Rightarrow 41 \cdot 27m + 14^k(41 - 14)$$
$$\Rightarrow 41 \cdot 27m + 14^k \cdot 27$$
$$\Rightarrow 27(41m + 14^k), \text{संख्या 27 का एक गुणज है।}$$

इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं **N** के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।

Question 24 :

$$(2n+7) < (n+3)^2$$

Solution :

मान की दिया कथन $P(n)$ है, अर्थात्

$$P(n) : (2n+7) < (n+3)^2$$

∴ n = 1

LHS =

$$P(1) : 2 \times 1 + 7 = 2 + 7 = 9$$

RHS =

$$P(1) : (1+3)^2 = 4^2 = 16$$

LHS < **RHS** सत्य है।

किसी धन पूर्णांक k के लिए कल्पना कीजिए कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात

$$P(k) : (2k+7) < (k+3)^2 \qquad \ldots.(i)$$

अब हम सिद्ध करेंगे कि $P(k+1)$ भी सत्य है,

$$\begin{aligned} P(k+1) : & \, 2(k+1) + 7 \\ & \Rightarrow 2k + 2 + 7 \\ & \Rightarrow (2k+7) + 2 \\ & < (k+3)^2 + 2 \qquad \ldots \text{eq(i) से} \\ & < k^2 + 6k + 9 + 2 \\ & < k^2 + 6k + 11 \end{aligned}$$

अब,

$$[(k+1)+3]^2 = (k+4)^2 = k^2 + 8k + 16$$
$$\because k^2 + 6k + 11 < k^2 + 8k + 16$$
$$\therefore 2(k+1) + 7 < [(k+1)+3]^2$$

इस प्रकार, $P(k+1)$ सत्य है, जब कभी $P(k)$ सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत से सभी प्राकृत संख्याओं $\mathbf{N}$ के लिए कथन $P(n)$ सत्य है।